Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória
aula 7

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

VRP

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos

Problemas de roteamento nos arcos

Utilização de Software – VRP **Spreadsheet Solver**

- VRP
  - Modelos – Casos Orientado e não Orientado
  - Relaxações
  - Heurística
  - Solver/Excel

P. Toth & D. Vigo (2014)
Vehicle Routing Problems, Methods, and Application
2nd ed., MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia

Node Routing Problems (NRP)

NRP

TSP | VRP | CVRP

Traveling Salesman Problem
(Problema do Caixeiro Viajante)

- 1 caixeiro
- Cidade de partida/chegada
- Visitar n cidades em tempo total mínimo

Vehicle Routing Problem

- 1 veículo
- Garagem de partida/chegada
- Visitar n clientes em tempo total mínimo

Capacitated VRP

- 1/K veículos de capacidade limitada
- Garagem de partida/chegada
- Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo total mínimo

VRP – Componentes Básicas

- Características da frota de veículos
- Condições de transporte
- Requisitos dos clientes – como podem ser satisfeitos
- Conceito de rota admissível
- Especificidades das rotas
- Dados a considerar – que custos e/ou proveitos; tempos; ofertas/procuras
- Horizonte de planeamento
- Sistemas dinâmicos – comunicação constante condutor/planeamento

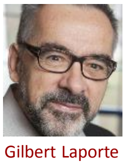
VRP – Curiosidades

- 1959 – Dantzig & Ramser – *The Truck Dispaching Problem*
  Management Science, Vol. 6, pp. 80-91
  - Distribuição de gasolina
  - 1º modelo matemático
  - 1ª Heurística

- 1964 – Clarke & Wright – *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*
  Operations Research, Vol. 12, pp. 568-581
- Savings Heuristic – greedy
- Grupos de Investigadores
  - USA – Transportation Science and Logistics society
  - Europa – VeRoLog – Vehicle Routing and Logistics Optimization (www.verolog.eu)

VRP – características

Capacitated VRP



Gilbert Laporte
HEC Montréal

- Veículos de capacidade limitada
- Garagem de partida/chegada – depósito
- Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo (custo; distância; ...) total mínimo
- Decidindo:
  - que veículo deve satisfazer que clientes

  &
  - qual a sequência de clientes a visitar por cada veículo
- VRP - Componentes básicas Identificar – requisitos da procura

Em geral, NP-difíceis!

Capacitated VRP (CVRP) –Notação

- $N = \{1,2,\dots,n\}$ – Clientes
- $V = N \cup \{0\}$; 0 – depósito
- Grafo:
  - $\mathrm{G} = (V,E)$ – Não Orientado $(\{i,j\} \in E)$ (grafo completo: $|E| = \frac{n(n+1)}{2}$)

  ou
  - $\mathrm{G} = (V,A)$ – Orientado $((i,j) \in A)$ (grafo completo: $|A| = n(n+1)$)
- $K = \{1,\dots,|K|\}$ $(|K| \geq 1)$ veículos homogéneos de capacidade limitada
- $Q > 0$ – capacidade de cada veículo
- c_{ij} – custo (distância; tempo;...) da ligação (i,j)
- q_i – procura/oferta do cliente $i \in N$
- $\delta^+(i)$ – nº de arcos a sair de i (grau externo); $\delta^-(i)$ – nº de arcos a entrar (grau interno) em $i \in V$
- $\delta^+(S)$– nº de arcos a sair de $S \subset V$; $\delta^-(S)$ – nº de arcos a entrar em $S \subset V$
- $\delta(i)$ – nº de arestas incidentes (grau) em $i \in V$; $\delta(S)$ – nº de arestas incidentes em $S \subset V$

Capacitated VRP (CVRP) – Notação

- ***Rota*** – sequência de vértices, com início e fim no depósito, $r = (0, i_1, i_2, \dots, i_s, 0)$ que visita um subconjunto de clientes, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq N$
- A ***rota*** r é ***admissível***:
  - se a procura dos clientes visitados, S, não excede a capacidade do veículo, ou seja, se $q(S) = \sum_{i \in S} q_i \leq Q$

  e se
  - nenhum cliente é visitado mais de uma vez
- SA para o CVRP - $|K|$ rotas admissíveis, uma para cada veículo $k \in K$
- As rotas $r_1, r_2, \dots, r_{|K|}$ e os correspondentes conjuntos de clientes $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representam uma SA para o CVRP se todas as rotas forem admissíveis e se $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representarem uma partição de N

CVRP – Resolução

- Tarefas interligadas para identificar uma SA para o CVRP:
  - Identificar uma partição do conjunto de clientes N em $|K|$ subconjuntos
  - Identificar uma rota admissível que sirva cada um dos subconjuntos de clientes - TSP

- Se resolvidas em separado não podemos garantir a otimalidade da solução!

CVRP – Modelos - CO

- Dados: $G = (V, A)$; c_{ij}; q_i; K; Q;
- Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$
- Modelo: $\boxed{|A| = n(n+1) \text{ variáveis!}}$

G. Laporte, H. Mercure, Y. Nobert, 1986
An exact algorithm for the assymetrical capacitated VRP
Networks, Vol. 16, pp. 33-46

$$(\text{VRP1}) \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$ Minimização do custo total

$$\text{s. a:} \begin{cases} \sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1 & \forall i \in N \\ \sum_{k\in\delta^-(i)} x_{ki} = 1 & \forall i \in N \\ \sum_{j\in\delta^+(0)} x_{0j} = |K| & \\ \sum_{j\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil & \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

Sai 1 vez de cada cliente i

Chega 1 vez a cada cliente i

São usados os $|K|$ veículos

Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais & capacidade

VRP – Modelos – CO – exemplo 4

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1	25	-	40	20	50	25	15	50
C2	60	35	-	50	20	30	40	10
C3	35	30	45	-	20	50	60	35
C4	25	40	35	30	-	50	60	20
C5	30	35	10	60	35	-	80	20
C6	45	20	35	50	70	45	-	25
C7	60	35	25	40	30	60	50	-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

a) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.

b) Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos - CNO

G. Laporte, Y. Nobert, M. Desrochers 1985
Optimal routing under capacity and distance restrictions
Op. Res., Vol. 33, pp. 1050-1073

- Dados: $G = (V, E)$; c_{ij}; q_i; K; Q;
- Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja entre } i \in V \text{ e } j \in V \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\boxed{|E| = \frac{n(n+1)}{2} \text{ variáveis!}}$

- Modelo:

$$(\text{VRP2}) \quad \min \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij}\, x_{ij}$$ Minimização do custo total

s. a:

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$$ 2 arestas incidentes em cada cliente i

$$\sum_{j \in \delta(0)} x_{0j} = 2|K|$$ Os $|K|$ veículos partem e chegam ao depósito

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2\left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$ Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais & capacidade

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall \{i,j\} \in E$$

VRP – Modelos – CNO – exemplo 5

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1		-	40	20	50	25	15	50
C2			-	50	20	30	40	10
C3				-	20	50	60	35
C4					-	50	60	20
C5						-	80	20
C6							-	25
C7								-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

a) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.
b) Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos

- Técnicas para lidar com as restrições de quebra de subcircuitos (em nº exponencial):
  - Relaxações – eliminando todas ou parte destas restrições, que podem depois ir sendo inseridas – Branch-and-Cut!
  - Recorrendo a novas variáveis & restrições – caso orientado – *MTZ-model*

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin, 1960
Integer programming formulations for the TSP
Journal of the ACM, Vol. 7, pp. 326-329

CVRP – Modelos - CO

- Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais & capacidade:

$$\sum_{j\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin, 1960

- Novas Variáveis: u_i – procura já satisfeita quando o veículo chega a $i \in N$
  - Quebra de Subcircuitos ilegais: $u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i,j) \in A(N)$
  - Capacidade: $q_i \leq u_i \leq Q \qquad \forall i \in N$

CVRP – Modelos - CO

- Modelo: *MTZ*

$(\text{VRP}MTZ)\ \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$ Minimização do custo total

s. a:

$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$ Sai 1 vez de cada cliente i

$\sum_{j\in\delta^-(i)} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in N$ Chega 1 vez a cada cliente i

$\sum_{j\in\delta^+(0)} x_{0j} = |K|$ São usados os $|K|$ veículos

$u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i,j) \in A(N)$ Eliminação de subcircuitos ilegais

$q_i \leq u_i \leq Q \quad \forall i \in N$ Capacidade

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$

$n(n+2)$ variáveis

$n(n+5)+1$ restrições

VRP – Modelos – CO – exemplo 4

Considere de novo o exemplo 4:

a) Formule o problema utilizando as restrições *MTZ* para eliminação dos subcircuitos ilegais

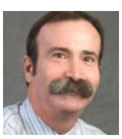
b) Compare os valores dos problemas resolvidos anteriormente com o de a)

CVRP – Modelos - CO

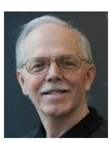
Problema dos modelos anteriores:

- Pode ser difícil identificar o serviço de cada veículo!

- Modelos com variáveis de 3 índices!



Bruce L. Golden
Univ. Maryland



Tom L. Magnanti
MIT

B.L. Golden, T.L. Magnanti, H.Q. Nguyen, 1977
Implementing VR algorithms
Networks, Vol. 7, pp. 113-148

CVRP – Modelos - CO

Modelos de 3 índices

Golden, Magnanti, Nguyen, 1977

- Variáveis:
  - $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
  - $y_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ visita } i \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
  - u_i^k - (minorante da) procura servida pelo veículo k até chegar a $i \in N$

$|K|[n(n+3)+1]$ variáveis

CVRP – Modelos - CO

3 índices com restrições *MTZ*

$$\text{(VRP3)} \quad \min \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}^k$$

Minimização do custo total

s. a:

$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j\in\delta^-(i)} x_{ji}^k = 0$	$\forall i \in N; \forall k \in K$	cada k entra e sai de i = nº de vezes
$\sum_{j\in\delta^+(0)} x_{0j}^k = 1$	$\forall k \in K$	cada k sai 1 vez do depósito
$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij}^k = y_i^k$	$\forall i \in N; \forall k \in K$	cada k, se sai de i visita i
$\sum_{j\in\delta^-(0)} x_{j0}^k = y_0^k$	$\forall k \in K$	cada k regressa ao depósito
$\sum_{k\in K} \sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij}^k = 1$	$\forall i \in N$	garantir os serviços
$u_i^k - u_j^k + Q x_{ij}^k \le Q - q_j$	$\forall (i,j) \in A; \forall k \in K$	eliminação de subcircuitos ilegais
$q_i \le u_i^k \le Q$	$\forall i \in N; \forall k \in K$	capacidade
$x_{ij}^k \in \{0,1\}$	$\forall (i,j) \in A; \forall k \in K$	
$y_i^k \in \{0,1\}$	$\forall i \in N; \forall k \in K$	

$|K|[n(n+5)+2]+n$ restrições

VRP – Modelos – CO – exemplo 4

Considere de novo o exemplo 4:

Formule o problema utilizando as restrições *MTZ* para eliminação dos subcircuitos ilegais e a formulação de 3 índices, recorrendo a veículos com capacidade igual a 150.

CVRP – Heurísticas Construtivas

- Greedy
- Cluster 1st – Route 2nd
  - Identificar uma partição do conjunto de clientes N em $|K|$ subconjuntos
  - Identificar uma rota admissível que sirva cada um dos subconjuntos de clientes - TSP
- Route 1st – Cluster 2nd
  - Identificar uma rota que inclua todos os clientes sem considerar as restrições de capacidade
  - Dividir a rota identificada em $|K|$ subrotas, uma para cada veículo

VRP – Savings Algorithm – Clarke & Wright

Clarke, G. & Wright, J.W., 1964
Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points
Op. Res., Vol. 12, pp. 568-581

- H. de Savings - Greedy:

Passo **0**: Inicialização:

Considerar que cada cliente é servido isolado, ou seja, uma rota por cada cliente

Passo **1**: Calcular o *saving* de juntar cada par de clientes por: $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$

Passo **2**: Ordenar os *savings* por ordem decrescente numa lista L

Passo **3**: Selecionar as rotas associada à junção de maior *saving* (1ª da lista L)

Se a junção das rotas identificadas for possível (Q),
- juntar as rotas respetivas
- Atualizar L; recalculando os *savings* necessários da junção de rotas
- Voltar a 2

C.c., retirar a junção de L

Passo **4**: **Se** ainda há *savings* positivos em L, voltar a 2

c.c. FIM

VRP – exemplo 5

Considere de novo o exemplo 5.

a) Utilizando a heurística de *savings* identifique uma SA.

b) Compare os valores dos problemas resolvidos anteriormente com o de a)

VRP – SOLVER

- Excel Add-in
- VRP_Spreadsheet_Solver_v3.01 – Exemplo Lisboa!

G Erdoğan, 2017
An open source Spreadsheet Solver for VRPs
Comp. & Operations Research, Vol. 84, pp. 62-72

VRP – Trabalho

Proponha um enunciado para um problema de VRP, recorrendo a uma instância com pelo menos 7 clientes e 2 veículos.

a) Utilize um algoritmo para obter uma SA.

b) Proponha um modelo para o problema, recorrendo a variáveis com dois índices, e uma sua relaxação. Com base na relaxação proposta determine um minorante para o problema.

c) Introduza um corte na relaxação proposta para tentar melhorar o valor do minorante.

d) Utilizando o modelo de três índices e as restrições *MTZ*, para impedir subcircuitos ilegais, resolva o problema.

e) Utilize o *VRP Solver* para obter uma solução e compare-a com as geradas nas alíneas anteriores.